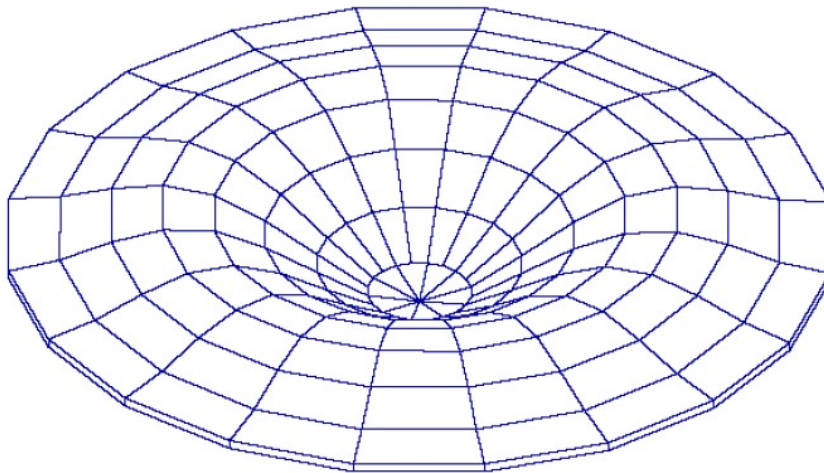


C.D.Gs. Win

Release 2009, 2010, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017 e 2018

Validazione del codice di calcolo



VERIFICA DI PORTANZA DELLE FONDAZIONI

Descrizione esempio

Allo scopo di verificare l'accuratezza dei risultati forniti dal software *C.D.Gs. Win* si procede al calcolo manuale di verifica di portanza della fondazione del telaio a campata unica fondato su trave rovescia rappresentato in figura 1. La trave di fondazione ha lunghezza $L = 5 [m]$. Le caratteristiche geometriche della sezione trasversale sono rappresentate sempre in figura 1. In particolare l'altezza totale è $h = 0.6 [m]$ e la larghezza del magrone è $B = 0.9 [m]$.

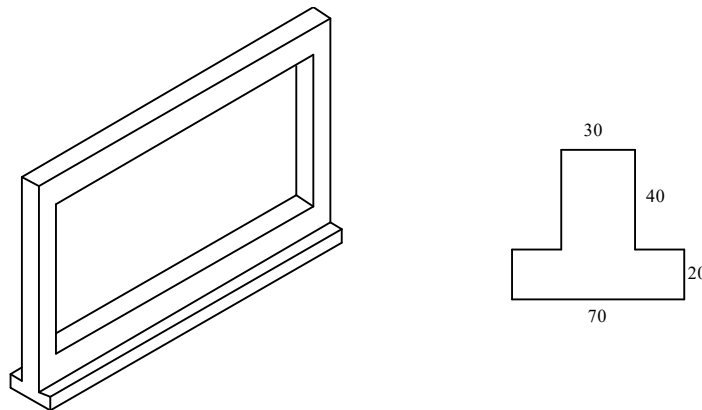


Fig. 1. Telaio fondato su trave rovescia

Il telaio è soggetto ad un carico verticale linearmente distribuito applicato sulla trave in elevazione $q_v = -1.5 [t/m]$. Nell'analisi sono stati trascurati gli effetti dovuti al peso proprio degli elementi strutturali.

Le caratteristiche meccaniche del suolo di fondazione sono riportate nella tabella I e confermato dalla tabella di stampa di *C.D.Gs. Win* di seguito riportata:

Peso specifico	$\gamma = 1800 [kg/m^3]$
Angolo d'attrito	$\varphi = 35^\circ = 0.611 [rad]$
Coesione	$c = 0.1 [kg/cm^2]$
Modulo elastico	$E = 500 [kg/cm^2]$
Rapporto di <i>Poisson</i>	$\nu = 0.2$

Tab. I. Parametri meccanici suolo di fondazione

PARAMETRI GEOTECNICI TRAVI WINKLER													
IDENTIFICATIVO				CONDIZIONE DRENATA								NON DRENATA	
Trave N.ro	Infiss m	Tipo Tabel	Gamma kg/mc	Fi' Grd	C' kg/cmq	Mod. El kg/cmq	Poisson	P base kg/cmq	Indice Rigid.	IndRig Crit.	Cu kg/cmq	P base kg/cmq	
1	0.60	M1	1800	35.00	0.10	500.00	0.20	0.11	896.68	242.38	0.10	0.11	

Per la fondazione sono stati fissati affondamento e ricoprimento nulli. Si prevede quindi che il piano di campagna sia coincidente con l'estradosso delle fonazioni, con una distanza fra i piani di

campagna e di posa delle fondazioni $D = h = 0.6 [m]$.

Carico sollecitante

Il risultate complessivo delle forze scaricate in fondazione dal telaio è:

$$R_v = |q_v| \cdot l = 1.5 [t/m] \cdot 5 [m] = 7.5 [t] = 7500 [kg]$$

Tale risultato è in accordo con quello fornito dal software, come mostrato dalla tabella di stampa di seguito riportata (anche in *C.D.Gs. Win* si è trascurato il peso proprio):

RISULTANTI SOLLECITAZIONI TRAVI WINKLER						
Trave N.ro	Combinazione N.ro	Rv (kg)	Vx (kg)	Vy (kg)	Mrx kg*cm	Mry kg*cm
1	A1 / 1	7500	0	0	0	0

Test di validazione formulazione classica

Il carico limite del terreno q_{lim} , da confrontare con il risultate delle forze scaricate in fondazione R_v , è determinato con la formula di *Brinch-Hansen*:

$$q_{lim} = q \cdot N_q \cdot \Psi_q \cdot i_q \cdot d_q \cdot b_q \cdot g_q \cdot s_q + c \cdot N_c \cdot \Psi_c \cdot i_c \cdot d_c \cdot b_c \cdot g_c \cdot s_c + \frac{1}{2} \gamma \cdot B' \cdot N_\gamma \cdot \Psi_\gamma \cdot i_\gamma \cdot b_\gamma \cdot s_\gamma$$

Sono di seguito valutati tutti i coefficienti presenti nella formula di Brinch-Hansen nel caso di condizione drenata.

Carico sul piano di fondazione

$$q = \gamma \cdot D = 1080 [kg]$$

Fattori di capacità portante

$$N_q = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \exp \{ \pi \tan(\varphi) \} = 33.296$$

$$N_c = \frac{N_q - 1}{\tan(\varphi)} = 46.123$$

$$N_\gamma = 2(N_q + 1)\tan(\varphi) = 48.028$$

Coefficienti di punzonamento

$$\Psi_q = \Psi_\gamma = \exp\left\{\left(0.6\frac{B}{L} - 4.4\right)\tan(\varphi) + 3.07\frac{\sin(\varphi) \cdot \log(2I_R)}{1 + \sin(\varphi)}\right\} = 1$$

$$\Psi_c = \Psi_q - \frac{1 - \Psi_q}{N_q \tan(\varphi)} = 1$$

Nelle precedenti si è posto:

$$I_R = \frac{G}{c + q' \tan(\varphi)} = 896.677 \leq I_{CR}$$

con:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 208.333 \text{ [kg/cm}^2\text{]} \quad ; \quad q' = \gamma\left(D + \frac{B}{2}\right) = 1890 \text{ [kg]}$$

$$I_{CR} = \frac{1}{2} \exp\left\{\frac{3.3 - 0.45\frac{B}{L}}{\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}\right\} = 242.377$$

Coefficienti di inclinazione del carico

$$i_q = \left(1 - \frac{H}{N + B \cdot L \cdot c \cdot \cotg(\varphi)}\right)^m = 1$$

$$i_c = i_q - \frac{1 - i_q}{N_c \cdot \tan(\varphi)} = 1$$

$$i_\gamma = \left(1 - \frac{H}{N + B \cdot L \cdot c \cdot \cotg(\varphi)}\right)^{m+1} = 1$$

Nelle precedenti si è posto:

$$m = m_b \cos^2(\vartheta) + m_L \sin^2(\vartheta) = 1.847$$

$$m_B = \frac{2 + \frac{B}{L}}{1 + \frac{B}{L}} = 1.847 \quad ; \quad m_L = \frac{2 + \frac{L}{B}}{1 + \frac{L}{B}} = 1.153 \quad ; \quad \vartheta = \tan^{-1} \left(\frac{Fh_B}{Fh_L} \right) = 0$$

essendo $Fh_B = 0$ ed $Fh_L = 0$ le forze orizzontali lungo B ed L , $H = \sqrt{Fh_B^2 + Fh_L^2} = 0$ il risultante di tali forze ed $N = R_v = 7500 [kg]$ il risultante delle forze verticali.

Coefficienti di affondamento del piano di posa

$$d_q = 1 + 2 \frac{D}{B} \tan(\varphi) \cdot (1 - \sin(\varphi))^2 = 1.17$$

$$d_c = d_q - \frac{1 - d_q}{N_c \tan(\varphi)} = 1.175$$

Coefficienti di inclinazione del piano di posa

$$b_q = b_\gamma = \exp\{-2.7 \cdot \alpha \cdot \tan(\varphi)\} = 1$$

$$b_c = \exp\{-2 \cdot \alpha \cdot \tan(\varphi)\} = 1$$

essendo $\alpha = 0$ l'inclinazione del terreno di fondazione

Coefficienti di inclinazione del terreno di fondazione

$$g_q = g_c = 1$$

Coefficienti di forma

$$s_q = 1 + \frac{B}{L} \tan(\varphi) = 1.126$$

$$s_c = 1 + \frac{B}{L} \frac{N_q}{N_c} = 1.13$$

$$s_\gamma = 1 - 0.4 \frac{B}{L} = 0.928$$

Carico limite

Sostituendo i coefficienti determinati nella formula di *Brinch-Hansen* si ha:

$$q_{\text{lim}} = 144.69 [t/m^2]$$

Il carico limite della fondazione si determina quindi moltiplicando q_{lim} per la superficie di impronta della fondazione e dividendolo per il coefficiente parziale $\gamma_R = 2.3$, e risulta:

$$Q_{\text{lim}} = \frac{q_{\text{lim}} \cdot B \cdot L}{\gamma_R} = 283.09 [t]$$

I risultati ottenuti risultano coincidenti con quelli forniti dal software *C.D.Gs. Win* di seguito riportati:

COEFFICIENTI DI PORTANZA TRAVI WINKLER - CONDIZIONI DRENATE																				
Trave N.ro	Brinch Hansen			Incl. terreno			Igk Sism	Comb N.ro	Coeff.Incl.Carico			Affondamento			Forma			Punzonamento		
	Nc	Nq	Ng	Gc	Gq	Gg			IcV	IqV	IgV	Dc	Dq	Dg	Sc	Sq	Sg	Psic	Psq	Psig
1	46.12	33.30	48.03	1.00	1.00	1.00	1.00	A1/1	1.00	1.00	1.00	1.18	1.17	1.00	1.13	1.13	0.93	1.00	1.00	1.00

PORTANZA TRAVI WINKLER														
IDENTIFICATIVO					DRENATE		NON DRENATE		RISULTATI					
Trave N.ro	Asta3d N.ro	Comb N.ro	Bx' m	By' m	GamEf kg/mc	QLimV (t)	GamEf kg/mc	QLimV (t)	N (t)	Coeff. Sicur.	Minimo CoeSic	N/Ar kg/cmq	QLim/Ar kg/cmq	Status Verifica
1	4	A1 / 1	0.90	5.00	1800	283.1			7.5	2.04	2.04	0.17	0.34	OK

Descrizione metodo di verifica non lineare

Il metodo di verifica proposto consiste nella valutazione del coefficiente di sicurezza λ_u dell'insieme terreno-fondazione, definito come:

$$\lambda_u = \frac{R_d}{E_d}$$

Per la valutazione del coefficiente λ_u è condotta un'analisi non lineare sulla sottostruttura, estrapolata dall'intero sistema strutturale, composta dagli elementi di fondazione ipotizzati come elastici e poggianti su suolo a comportamento non lineare.

Sul sistema strutturale così costruito è applicato un sistema di forze nodali determinate come gli scarichi in fondazione derivanti dalla sovrastruttura. L'analisi è condotta facendo crescere monotonamente le forze applicate sulla sottostruttura di fondazione fino al raggiungimento di uno stato limite geotecnico o strutturale.

Tale procedura consente quindi la determinazione del moltiplicatore a rottura dei carichi agenti, che ovviamente coincide con il coefficiente di sicurezza λ_u .

Come descritto, per eseguire la verifica di portanza delle fondazioni viene estrapolata dall'intero sistema strutturale una sottostruttura di fondazione. Questa è composta da tutti gli elementi strutturali a contatto con il suolo (travi rovesce, platee e plinti diretti o su pali) e da quelli che, pur non essendo elementi di fondazione, giacciono interamente sul medesimo piano di posa di almeno un elemento di fondazione.

Gli elementi strutturali che compongono la sottostruttura di fondazione sono modellati a comportamento elastico lineare e, se a contatto con il suolo, schematizzati come poggianti su un letto di molle a comportamento non lineare nei riguardi della componente verticale di spostamento ed elastico per le altre componenti di spostamento.

I legami costitutivi forza-spostamento ($p-u$) delle molle non lineari utilizzate per modellare il suolo sono del tipo elasto-plastico. In particolare nel caso di fondazioni superficiali (travi rovesce, platee, plinti diretti) il legame costitutivo è non resistente a trazione (Fig 2 a), mentre per i pali e esteso anche nel verso delle trazioni, con andamento differente rispetto a quello delle compressioni (Fig 2 b).

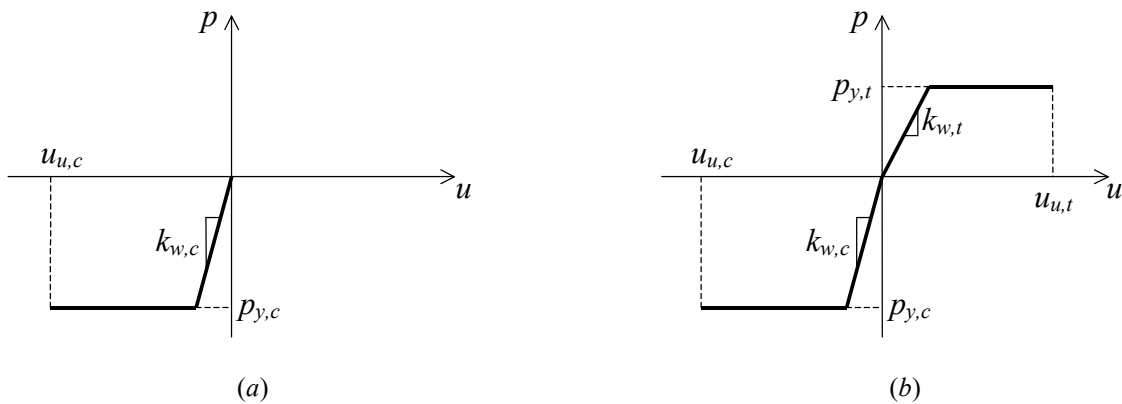


Fig. 2. Legami costitutivi molle non lineari: a) fondazioni superficiali; b) pali.

Per le fondazioni superficiali la rigidezza $k_{w,c}$ del tratto elastico del legame è valutata a partire dalla costante di *Winkler* del terreno tenendo conto della superficie di impronta di competenza della

singola molla. Per le fondazioni profonde le rigidezze $k_{w,c}$ e $k_{w,t}$ sono invece determinate tenendo conto sia delle caratteristiche del terreno che della geometria del singolo palo.

I valori di limite elastico $p_{y,c}$ e $p_{y,t}$ della forza sono dedotte dal valore Q_{lim} del carico limite calcolato con le normali teorie di *Brinch-Hansen* e *Vesic* non effettuando però la riduzione della superficie di impronta efficace di contatto fra fondazione e terreno.

Così come previsto da normativa sono eseguite verifiche agli stati limite ultimi sia del suolo di fondazione (SLU di tipo GEO) che degli elementi strutturali (SLU di tipo STR).

In particolare si assume che sia stato raggiunto lo stato limite ultimo del terreno se lo spostamento sotto una delle molle non lineari attinge al valore ultimo $u_{u,c}$ o $u_{u,t}$. Inoltre si ha lo stato limite ultimo nel terreno se tutte le molle che modellano il suolo hanno raggiunto la fase plastica del legame costitutivo. In questa condizione infatti non è più possibile equilibrare ulteriori incrementi di carico.

Per quanto riguarda gli elementi strutturali, essendo questi ipotizzati a comportamento elastico lineare, la verifica allo stato limite è ricondotta ad una verifica degli spostamenti relativi. Lo stato limite ultimo si ritiene raggiunto se la differenza fra gli spostamenti di due nodi dell'elemento risulta superiore ad 1/50 della distanza fra i nodi.

Le verifiche sono analoghe nel caso in cui sia condotta una verifica classica di portanza delle

fondazioni, con la sola differenza che in questo caso lo spostamento ultimo del terreno è assunto

pari a quello di limite elastico.

Test di validazione formulazione non lineare

È stata eseguita una prova di validazione del modulo di calcolo *C.D.Gs. Win* determinando il coefficiente di sicurezza delle fondazioni del telaio a campata unica fondato su trave rovescia le cui caratteristiche geometriche sono riportate in figura 3. Il telaio è soggetto ad un carico verticale linearmente distribuito applicato sulla trave in elevazione definito dai seguenti valori iniziale e finale $q_{iniz} = -1.2 [t/m]$ e $q_{fin} = -2.3 [t/m]$. Nell'analisi sono stati trascurati gli effetti dovuti al peso proprio degli elementi strutturali.

Le caratteristiche meccaniche del suolo di fondazione sono riportate in tabella II:

Costante di <i>Winkler</i>	$\varepsilon_w = 10 [kg/cm^3]$
Peso specifico	$\gamma = 1800 [kg/m^3]$
Angolo d'attrito	$\varphi = 35^\circ$
Coesione	$c = 0 [kg/cm^2]$

Tab. II. Parametri meccanici suolo di fondazione

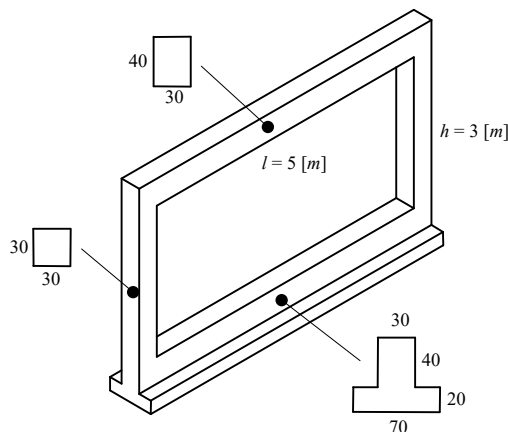


Fig. 3. Telaio fondato su trave rovescia

La verifica di portanza delle fondazioni eseguita con il modulo di calcolo automatico *C.D.Gs. Win* fornisce il moltiplicatori di collasso $\lambda_u = 17.550$.

È di seguito riportato il calcolo manuale del moltiplicatore λ_u secondo la procedura sopra descritta per valicare il risultato fornito da *C.D.Gs. Win*.

Adottando un numero di suddivisioni della trave di fondazione $n_{sudd} = 3$, lo schema statico da risolvere per eseguire la verifica di portanza è quello rappresentato in figura 4, formato da tre aste di lunghezza $\Delta l = l/n_{sudd} = 1.667 [m]$ collegato al suolo da 4 molle:

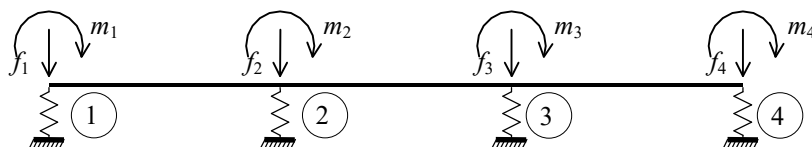


Fig. 4. Modello per la verifica di portanza

Le rigidezze iniziali $k_{w,i}$ e le forze di limite elastico $p_{y,i}$ delle molle sono determinate a partire dalla geometria della trave, dalla costante di *Winkler* ε_w e dal carico limite della trave che risulta $Q_{lim} = 169.9 [t]$. Per le molle si ha quindi:

$$\mathbf{k}_w = \begin{Bmatrix} \varepsilon_w b_w \Delta l / 2 \\ \varepsilon_w b_w \Delta l \\ \varepsilon_w b_w \Delta l \\ \varepsilon_w b_w \Delta l / 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 81750 \\ 163500 \\ 163500 \\ 81750 \end{Bmatrix} \quad [kN \cdot m^{-1}]$$

$$\mathbf{p}_y = \begin{Bmatrix} Q_{lim} / (2n_{sudd}) \\ Q_{lim} / n_{sudd} \\ Q_{lim} / n_{sudd} \\ Q_{lim} / (2n_{sudd}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 277.786 \\ 555.573 \\ 555.573 \\ 277.786 \end{Bmatrix} \quad [kN]$$

avendo indicato con $b_w = 1.0 [m]$ la larghezza del magrone della trave di fondazione.

Le forze ed i momenti nodali agenti sono determinate a partire dai corrispondenti valori globali scaricati sulla trave dalla sovrastruttura, che sono $f_{tot} = 8750 [kg]$ e $m_{tot} = 229167 [kg \cdot cm]$.

Risulta quindi:

$$\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} f_{tot} / (2n_{sudd}) \\ f_{tot} / n_{sudd} \\ f_{tot} / n_{sudd} \\ f_{tot} / (2n_{sudd}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 14.306 \\ 28.613 \\ 28.613 \\ 14.306 \end{Bmatrix} \quad [kN]$$

$$\mathbf{m} = \begin{Bmatrix} m_{tot} / (2n_{sudd}) \\ m_{tot} / n_{sudd} \\ m_{tot} / n_{sudd} \\ m_{tot} / (2n_{sudd}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3.747 \\ 7.494 \\ 7.494 \\ 3.747 \end{Bmatrix} \quad [kN \cdot m]$$

Modellando la struttura di figura 4 come piana, l'equazione di equilibrio della stessa può essere scritta nella forma seguente:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_u + \mathbf{K}_w & \mathbf{K}_{u\phi} \\ \mathbf{K}_{u\phi}^T & \mathbf{K}_\phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{m} \end{Bmatrix}$$

Nella precedente relazione \mathbf{u} e ϕ sono i sottovettori dei gradi di libertà nodali e \mathbf{K}_w è la matrice diagonale delle rigidezze delle molle:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} ; \quad \boldsymbol{\phi} = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix} ; \quad \mathbf{K}_w = \begin{bmatrix} k_{w,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{w,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{w,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{w,4} \end{bmatrix}$$

Le sottomatrici di rigidità \mathbf{K}_u , $\mathbf{K}_{u\phi}$ e \mathbf{K}_ϕ , utilizzando le unità di misura kN per le forze e m per le lunghezze, risultano:

$$\mathbf{K}_u = \begin{bmatrix} 6.005 \cdot 10^5 & -6.005 \cdot 10^5 & 0 & 0 \\ -6.005 \cdot 10^5 & 1.201 \cdot 10^6 & -6.005 \cdot 10^5 & 0 \\ 0 & -6.005 \cdot 10^5 & 1.201 \cdot 10^6 & -6.005 \cdot 10^5 \\ 0 & 0 & -6.005 \cdot 10^5 & 6.005 \cdot 10^5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{u\phi} = \begin{bmatrix} 5.004 \cdot 10^5 & 5.004 \cdot 10^5 & 0 & 0 \\ -5.004 \cdot 10^5 & 0 & 5.004 \cdot 10^5 & 0 \\ 0 & -5.004 \cdot 10^5 & 0 & 5.004 \cdot 10^5 \\ 0 & 0 & -5.004 \cdot 10^5 & -5.004 \cdot 10^5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_\phi = \begin{bmatrix} 5.56 \cdot 10^5 & 2.78 \cdot 10^5 & 0 & 0 \\ 2.78 \cdot 10^5 & 1.112 \cdot 10^6 & 2.78 \cdot 10^5 & 0 \\ 0 & 2.78 \cdot 10^5 & 1.112 \cdot 10^6 & 2.78 \cdot 10^5 \\ 0 & 0 & 2.78 \cdot 10^5 & 5.56 \cdot 10^5 \end{bmatrix}$$

Risolviendo la struttura in oggetto nell'ipotesi di molle a comportamento elastico lineare si ottengono i seguenti abbassamenti nodali:

$$\bar{\mathbf{u}}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 1.287 \cdot 10^{-4} \\ 1.619 \cdot 10^{-4} \\ 1.881 \cdot 10^{-4} \\ 2.213 \cdot 10^{-4} \end{Bmatrix} \quad [m]$$

Il moltiplicatore dei carichi λ_1 cui corrisponde la prima plasticizzazione di una molla si determina come:

$$\lambda_1 = \min \left\{ \frac{u_{y,i}}{\bar{u}_i^{(1)}} ; \quad i = 1, K, 4 \right\}$$

essendo $u_{y,i} = p_{y,i}/k_{w,i}$ gli spostamenti di limite elastico delle molle.

Risulta:

$$\lambda_1 = \frac{u_{y,4}}{\bar{u}_4^{(1)}} = 15.355$$

Sotto le forze esterne $\lambda_1 \mathbf{f}$ e $\lambda_1 \mathbf{m}$ si ha quindi la plasticizzazione della molla 4 e gli spostamenti nodali sono:

$$\mathbf{u}^{(1)} = \lambda_1 \bar{\mathbf{u}}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 1.976 \cdot 10^{-3} \\ 2.487 \cdot 10^{-3} \\ 2.888 \cdot 10^{-3} \\ 3.398 \cdot 10^{-3} \end{Bmatrix} [m]$$

Incrementando le forze di $\Delta\lambda$ queste saranno equilibrate da una struttura analoga a quella di figura 4 ma priva della molla del nodo 4, e quindi nella matrice \mathbf{K}_w dovrà essere posta pari a 0 la 4° componente della diagonale principale. Sotto tale incremento di forze gli abbassamenti nodali sono:

$$\mathbf{u}^{(1)} + \Delta\lambda \bar{\mathbf{u}}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 1.976 \cdot 10^{-3} + \Delta\lambda \cdot 4.539 \cdot 10^{-5} \\ 2.487 \cdot 10^{-3} + \Delta\lambda \cdot 1.346 \cdot 10^{-4} \\ 2.888 \cdot 10^{-3} + \Delta\lambda \cdot 3.677 \cdot 10^{-4} \\ 3.398 \cdot 10^{-3} + \Delta\lambda \cdot 8.716 \cdot 10^{-4} \end{Bmatrix} [m]$$

essendo $\bar{\mathbf{u}}^{(2)}$ il vettore degli abbassamenti nodali ottenuti dall'equazione di equilibrio avendo però modificato come descritto la matrice \mathbf{K}_w .

Il moltiplicatore dei carichi λ_2 cui corrisponde la plasticizzazione di una seconda molla si determina come:

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda_2 = \lambda_1 + \min \left\{ \frac{u_{y,i} - u_i^{(1)}}{\bar{u}_i^{(2)}}; \quad i = 1, K, 3 \right\}$$

e risulta:

$$\Delta\lambda_2 = \frac{u_{y,3} - \lambda_1 u_3^{(1)}}{\bar{u}_3^{(2)}} = 1.388 \quad ; \quad \lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda_2 = 16.743$$

Sotto le forze esterne $\lambda_2 \mathbf{f}$ e $\lambda_2 \mathbf{m}$ si ha quindi la plasticizzazione della molla 3 e gli spostamenti nodali sono:

$$\mathbf{u}^{(2)} = \mathbf{u}^{(1)} + \Delta\lambda_2 \bar{\mathbf{u}}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 2.039 \cdot 10^{-3} \\ 2.673 \cdot 10^{-3} \\ 3.398 \cdot 10^{-3} \\ 4.608 \cdot 10^{-3} \end{Bmatrix} [m]$$

Incrementando ancora le forze di $\Delta\lambda$ queste saranno equilibrate da una struttura analoga a quella di figura 4 ma adesso priva delle molle dei nodi 3 e 4, e quindi nella matrice \mathbf{K}_w dovranno essere poste pari a 0 le 3° e 4° componente della diagonale principale. Sotto tale incremento di forze gli abbassamenti nodali sono:

$$\mathbf{u}^{(2)} + \Delta\lambda \bar{\mathbf{u}}^{(3)} = \begin{Bmatrix} 2.039 \cdot 10^{-3} - \Delta\lambda \cdot 6.900 \cdot 10^{-4} \\ 2.673 \cdot 10^{-3} + \Delta\lambda \cdot 8.700 \cdot 10^{-4} \\ 3.398 \cdot 10^{-3} + \Delta\lambda \cdot 3.375 \cdot 10^{-4} \\ 4.608 \cdot 10^{-3} + \Delta\lambda \cdot 6.351 \cdot 10^{-4} \end{Bmatrix} \quad [m]$$

essendo $\bar{\mathbf{u}}^{(3)}$ il vettore degli abbassamenti nodali ottenuti dall'equazione di equilibrio avendo però modificato come descritto la matrice \mathbf{K}_w .

Il moltiplicatore dei carichi λ_3 cui corrisponde la plasticizzazione di un'altra molla si determina come:

$$\lambda_3 = \lambda_2 + \Delta\lambda_3 = \lambda_2 + \min \left\{ \frac{u_{y,i} - u_i^{(2)}}{\bar{u}_i^{(3)}} ; \quad i = 1, 2 \right\}$$

e risulta:

$$\Delta\lambda_3 = \frac{u_{y,2} - u_2^{(2)}}{\bar{u}_2^{(3)}} = 0.833 \quad ; \quad \lambda_3 = \lambda_2 + \Delta\lambda_3 = 17.576$$

Sotto le forze esterne $\lambda_3 \mathbf{f}$ e $\lambda_3 \mathbf{m}$ risultano quindi plasticizzate le molle 2, 3 e 4. In tale condizione la struttura non è più in grado di equilibrare incrementi delle forze applicate e quindi il moltiplicatore λ_3 coincide con quello ultimo.

Il risultato ottenuto mostra un ottimo accordo fra il valore fornito dal codice di calcolo e quello esatto. L'errore percentuale è infatti poco superiore allo 0.1% come di seguito mostrato:

$$err = 100 \cdot \frac{|\lambda_3 - \lambda_u|}{\lambda_3} = 0.14\%$$